Una perspectiva diacrónica en la estructura de la lógica cuántica

Resumen

El llamado límite clásico de la mecánica cuántica es generalmente estudiado en términos de la decoherencia del operador de estado de un sistema. Este no es el único enfoque. En trabajos previos hemos presentado la posibilidad de estudiar dicho límite en términos de la decoherencia de los observables relevantes del sistema. Sobre la base de esta perspectiva, en el presente trabajo introducimos el límite clásico desde un punto de vista lógico estudiando la manera en la cual la estructura lógica de propiedades correspondientes a los observables relevantes adquiere características booleanas.

1. Introducción

Existen diferentes perspectivas para abordar el problema del límite clásico de la mecánica cuántica. El tratamiento ortodoxo introduce el fenómeno de decoherencia como la clave para resolver el problema (Bub, 1997). Su principal enfoque es llamado decoherencia inducida por el ambiente, desarrollada por Zurek y sus colaboradores (ver Zurek, 1981; Zurek 2003). El objetivo central se reduce a describir un proceso mediante el cual el estado del sistema puede describirse como un estado mezclado de otros estados, de modo que pueda interpretarse en términos de ignorancia subjetiva.

Otros trabajos desarrollan un marco teórico para la decoherencia basada en los valores de expectación de los observables relevantes del sistema (Castagnino & Lombardi 2004, Kiefer y Polarski 2009). Si bien, estos enfoques y el enfoque ortodoxo son equivalentes desde un punto de vista matemático, hay buenas razones para considerar que el tratamiento de la decoherencia en términos de los observables goza de ventajas conceptuales (Castagnino y Autor, 2013).

El propósito de este trabajo es argüir que la principal ventaja del estudio de la decoherencia en términos de la representación de Heisenberg es que permite analizar los aspectos lógicos del límite clásico.

Los aspectos lógicos de una teoría están contenidos en la estructura lógica de propiedades obtenidas de los posibles valores que los observables pueden adquirir (Cohen, 1989; Bub1997). La principal diferencia entre la estructura de propiedades clásicas y cuánticas, es que la primera es distributiva, o booleana (Birkhoff y von

Neumann 1936), mientras que la cuántica no lo es. Esto es consecuencia directa de la existencia de observables incompatibles, es decir, cuyos operadores no conmutan (Cohen, 1989).

A pesar de esto, existen ciertos sistemas cuánticos que bajo ciertas condiciones evolucionan de manera tal que conmutadores entre operadores asociados a algunos observables del sistema tiende a cero luego de cierto tiempo (Kiefer y Polarski 2009). En tales sistemas, la estructura inicial de propiedades no booleanas, termina aproximándose a una que si lo es. Por lo tanto puede ser descriptos en términos de a decoherencia de los valores de expectación de los observables involucrados. En otras palabras, desde esta perspectiva, el límite clásico puede ser entendido la evolución dinámica de estructuras no booleanas hacia otras booleanas.

2. Estructura lógica de una teoría

La estructura lógica de una teoría puede ser estudiada al establecer un isomorfismo entre el conjunto de propiedades que la teoría describe y las sentencias del lenguaje que las tiene como predicado. Si el isomorfismo es establecido de manera consistente, las sentencias del lenguaje corresponderán a propiedades, y las operaciones lógicas sobre las sentencias se correspondan a ciertas operaciones algebraicas entre las correspondientes propiedades.

La estructura matemática de propiedades no es la estructura lógica de la teoría, pero al estudiar la primera es posible determinar aspectos de la segunda Así, la estructura de las sentencias (proposiciones) en el discurso puede ser leída y analizada desde una estructura matemática de propiedades.

Cuando hablamos de propiedades de una teoría física, nos referimos a las *propiedades de valor* asociadas a magnitudes físicas que la teoría describe. Así si A es algún observable, de algún sistema físico que puede tener los valores a_i cuando dicho sistema se encuentra en ciertas condiciones dadas (en algún estado, digamos $|\varphi\rangle$), entonces una propiedad de valor estará representada por el par definido como $p_2 = (A, a_2)$; y una correspondiente sentencia del lenguaje podría expresarse como $L_2 =$'cuando el sistema está en el estado $|\varphi\rangle$ la magnitud A tiene valor a_2' .

La estructura más simple de propiedades queda establecida al definir una *relación de orden parcial* entre ellas. Un orden parcial , $\leq$, es una relación de orden que satisface reflexividad, transitividad y antisimetría (Cohen, 1989). La relación de orden entre las propiedades está fuertemente emparentada a la implicación lógica en sus correspondientes sentencias del lenguaje. Sin embargo no toda relación de orden al nivel de las propiedades puede ser vinculada a una implicación bien definida del lenguaje. Una implicación encara el problema de una función de verdad que puede dar origen a una estructura lógica en las sentencias del lenguaje , y esto puede resultar nada trivial como es en el caso cuántico (Mittelstaedt 1978). Sin embargo, aún sin una función de verdad bien definida, es posible establecer *funciones de probabilidad* sobre las propiedades. Un función de probabilidad $\wp$ es una función evaluada sobre un conjunto C de propiedades que asigna un valor entre cero y uno, $\wp : C \to [0,1]$. En ese caso el vínculo entre las sentencias del lenguaje y las propiedades quedan establecidos en términos probabilísticos. Así una propiedad representada por $p_2 = (A, a_2)$ podrá corresponder a una sentencia del lenguaje $L_2 =$'cuando el sistema está en el estado $|\varphi\rangle$ la magnitud A tiene valor a_2 con probabilidad $\wp(p_2) = 0.2$'.

Dotados de una relación de orden en el conjunto C de propiedades, es posible definir las operaciones algebraicas de *supremo* $\wedge$, *ínfimo* $\vee$, y *complemento* $\perp$, las cuales corresponden a los conectivos lógicos usuales entre las sentencias del lenguaje, es decir a la *conjunción*, *disyunción* y *negación* respectivamente (Bub, 1997; Hughes, 1992; Cohen, 1989). Cuando existen supremo e ínfimo para todo par de propiedades en C, entonces se dice que la relación de orden $\leq$ define un *retículo de propiedades* $R = (C, \leq)$ (Hughes, 1992).

Por medio de la relación de orden y las operaciones entre las propiedades (representativas de los conectivos lógicos que se aplican entre las sentencias del lenguaje), queda determinada una estructura algebraica de propiedades que caracteriza y permite estudiar los aspectos lógicos de la teoría.

En el caso clásico el conjunto de propiedades sobre las que predican las sentencias del lenguaje está determinado por todos los posibles subconjuntos del espacio de fases del sistema, y con una relación de orden parcial dada por la inclusión entre conjuntos. Esto induce una representación de las operaciones lógicas de conjunción, disyunción, y negación en el discurso clásico, por medio de las operaciones habituales de intersección, unión y complemento entre conjuntos (Bub, 1997; Hughes, 1992). La estructura así formada determinan un algebra booleana (Cohen, 1989) , y por eso se dice que los retículos clásicos son booleanos.

El caso cuántico es muy distinto. El conjunto de propiedades cuánticas quedan determinados por subespacios del espacio del Hilbert del sistema (Birkhoff y von Neumann 1936). Esto impone diferencias cruciales en la definición de las operaciones representativas de los conectivos lógicos. La relación de orden parcial entre propiedades es dada por la inclusión de subespacios de Hilbert. La operación ínfimo sigue siendo la intersección, aunque ahora entre subespacios. Las diferencias respecto al caso clásico son introducidas por las operaciones de supremo y complementación. El supremo entre dos propiedades de un retículo cuántico es definido con el subespacio generado por las combinaciones lineales de los elementos de cada subespacios que representan dichas propiedades (Bub, 1997; Hughes, 1992). La complementación de una propiedad es dada por el complemento ortogonal del subespacio que representa dicha propiedad. Resulta que así definido, el retículo de propiedades cuánticas no es booleano, y en esto reside la base de todas las diferencias con la estructura de propiedades clásicas, y gran parte de las llamadas paradojas que parece describir el discurso cuántico.

Una forma sintética de codificar las diferencias entre retículos clásicos y cuánticos reside en la validez de las llamadas *igualdades distributivas* (Cohen, 1989). Las igualdades distributivas implican la distributividad del ínfimo respecto al supremo y al revés. Sin embargo, en general valen las llamadas *desigualdades distributivas*. Si se tiene a, b y c, entonces siempre vale que

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Sólo en un retículo booleano valen las igualdades.

Otro aspecto importante asociado a las desigualdades distributivas es que estas atrapan la noción de compatibilidad como es entendida en la mecánica cuántica (Cohen, 1989). Es posible demostrar que si propiedades a y b son tales que

$$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$$
$$b = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^{\perp})$$

los proyectores asociados a los subespacios que las representan conmutan, y en cualquier otro caso, cuando valen las desigualdades, no conmutan.

Arribamos así a una importante síntesis. Sólo cuando todas las propiedades que se quieren describir son propiedades asociadas a observables compatibles, se tiene una estructura booleana de propiedades acorde a una descripción clásica de propiedades, y es ahí cuando valen las igualdades distributivas. En caso contrario, existirán observables incompatibles y la estructura de retículo no será booleana.

3. Incompatibilidad de los observables en el tiempo

La mecánica cuántica admite al menos dos representaciones, la de Schrödinger estudia la evolución del estado $\hat{\rho}(t)$, y la representación de Heisenberg estudia la evolución de los observables (Sakurai 1994). El enfoque tradicional para la decoherencia cuántica pone el énfasis en la evolución del estado reducido, es decir, utiliza la representación de Schrödinger. Lo que se estudia es la diagonalizacion del estado en la base privilegiada (ver Zurek 1982 y Paz & Zurek 2002). Esta diagonalización del estado elimina la interferencia, que es uno de los fenómenos particulares de la mecánica cuántica. Sin embargo este enfoque no dice nada sobre otra de las otra características peculiares de la mecánica cuántica, la contextualidad. La contextualidad nos enseña que hay observables que no conmutan y ellos no pueden tomar valores actuales simultáneamente. El principio de incertidumbre de Heisenberg refleja lo anterior diciéndonos que no es posible medir simultáneamente el valor de dos magnitudes que no conmutan. Este principio marca una diferencia fundamental con la mecánica clásica, ya que en ésta todos los observables conmutan entre sí. Entonces cualquier intento de construir un límite clásico debería incluir un mecanismo que explique la transición desde la no-conmutatividad a la conmutatividad de los observables.

En el esquema de Schrödinger, si un par de observables no conmuta en el instante inicial

$$\left[\hat{O}_1, \hat{O}_2\right] \neq 0$$

entonces no lo harán nunca ya que en este esquema los observables no evolucionan. Por este motivo, el esquema natural para estudiar la transición desde la no-conmutatividad a la conmutatividad de los observables es el esquema de Heisenberg. Algunos autores, como Kiefer y Polarski estudian la decoherencia en la representación de Heisenberg (ver Kiefer & Polarski 2009 y 1998). En este artículo nos proponemos continuar esta línea de trabajo estudiando la evolución temporal de las propiedades lógicas de los sistemas cuánticos. Nuestro objetivo es encontrar un proceso en el que dos observables que no conmutan en el instante inicial, pasen a conmutar luego de algún tiempo.

$$\left[\hat{O}_1(0), \hat{O}_2(0)\right] \neq 0 \rightarrow \left[\hat{O}_1(t), \hat{O}_2(t)\right] \cong 0$$

Con este propósito en mente utilizaremos el enfoque conocido como Decoherencia Autoinducida (SID por sus siglas en inglés Self-Induced Decoherence) desarrollado recientemente (ver Castagnino 1999, 2004 y 2006; Castagnino & Autor 2011 y 2013; Castagnino & Lombardi 2003 y 2005; Castagnino & Laura 1997, 2000a y 2000b; Laura & Castagnino 1998a y 1998b; Castagnino & Ordoñez 2004; Castagnino & Gadella 2006; Castagnino, Autor, Laura & Lombardi 2008; Autor, Lombardi & Castagnino 2014). Este enfoque nos permitirá mostrar de un modo sencillo el proceso de interés.

3.1 *La decoherencia autoinducida en el esquema de Heisenberg*

En este artículo usaremos la notación, según la cuál los observables son entendidos como vectores y se escriben como $\hat{O} = |O)$. Esto es necesario por cuestiones técnicas que no discutiremos en este artículo pero se encuentra bien justificada en Antoniou, Laura, Tasaki & Suchaecki 1997.

De acuerdo con el Esquema General para la Decoherencia, los distintos formalismos para describir la decoherencia se pueden describir desde un esquema general que consta de tres pasos (ver Castagnino, Autor, Laura & Lombardi 2008). En este caso seleccionamos observables especiales que resulten apropiados para el estudio de la compatibilidad entre observables, es decir, los conmutadores. Así, los tres pasos son:

1. *Selección de los observables*: Se considera un sistema cuántico con un hamiltoniano $\hat{H}$ con espectro continuo: $\hat{H}|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle$, $\omega \in [0,\infty)$. Entonces, cualquier observable a $t = 0$ se puede escribir como:

$$\hat{O}(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{O}(\omega,\omega') \,|\, \omega,\omega') d\omega d\omega' \quad (1)$$

   donde $\tilde{O}(\omega,\omega')$ es el núcleo de la distribución. De entre estos observables seleccionaremos los observables de van Hove (1957 y 1959), que tienen un núcleo $\tilde{O}(\omega,\omega')$ de la forma

$$\tilde{O}_{vH}(\omega,\omega') = O(\omega)\delta(\omega-\omega') + O(\omega,\omega') \quad (2)$$

   donde $O(\omega,\omega')$ es una función regular. Entonces, los observables de van Hove tienen la forma

$$\hat{O}_{vH}(0) = \int_0^\infty O(\omega) \,|\, \omega) d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty O(\omega,\omega') \,|\, \omega,\omega') d\omega d\omega' \quad (3)$$

Estos observables pertenecen al espacio de van Hove, cuya base es $\{|\omega), |\omega,\omega')\}$. Los estados $\hat{\rho}$, que no evolucionan, son representados por funcionales lineales, esto es, pertenecen al espacio dual y se escriben como:

$$\hat{\rho}(0) = \int_0^\infty \rho(\omega)\,|\,\omega)d\omega + \int_0^\infty\int_0^\infty \rho(\omega,\omega')\,|\,\omega,\omega')d\omega d\omega' \quad (4)$$

donde $\{(\omega|, (\omega,\omega'|\}$ es la co-base de $\{|\omega), |\omega,\omega')\}$ y $\rho(\omega,\omega')$ sa una función regular.

En el esquema de Heisenberg los operadores evolucionan con el operador de evolución temporal, entonces de la expresión (3) tenemos que

$$\hat{O}_{vH}(t) = \int_0^\infty O(\omega)\,|\,\omega)d\omega + \int_0^\infty\int_0^\infty O(\omega,\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\,|\,\omega,\omega')d\omega d\omega' \quad (5)$$

Dentro de este espacio de observables seleccionamos algunos observables especiales, los conmutadores. El conmutador entre dos observables $\hat{O}_1(t)$ y $\hat{O}_2(t)$ de van Hove cualesquiera es

$$\hat{C}(t) = \left[\hat{O}_1(t), \hat{O}_2(t)\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty C(\omega,\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\,|\,\omega,\omega')d\omega d\omega'$$

donde

$$C(\omega,\omega') = \int_0^\infty \left(O_1(\omega,\tilde{\omega}')O_2(\tilde{\omega}',\omega') - O_1(\tilde{\omega}',\omega')O_2(\omega,\tilde{\omega}')\right)d\omega$$

Es importante señalar que $\hat{C}(t)$ no es un observable porque no es un operador hermítico, sin embargo $\hat{D}(t) = i\hat{C}(t)$ es un observable legítimo de la mecánica cuántica al que podemos tener acceso empírico.

El observable $\hat{D}(t)$ nos permite medir el grado de incompatibilidad entre los observables $\hat{O}_1$ y $\hat{O}_2$. Un ejemplo de esto sería el observable que mide el contraste de las franjas de interferencia en el experimento de la doble rendija. El contraste indica que el observable que mide por donde pasó la partícula es incompatible con el observable que mide donde impacta en la pantalla.

Entonces, los observables relevantes seleccionados son los de tipo $\hat{D}(t)$.

2. *Cálculo del valor medio*: Consideremos el observable a tiempo $t = 0$

$$\hat{D}(0) = i^{-1}\left[\hat{O}_1, \hat{O}_2\right] = i^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty C(\omega,\omega')\,|\,\omega,\omega')d\omega d\omega'$$

supondremos que $C(\omega,\omega')$ es una función distinta de cero. Si se calcula el valor medio de $\hat{D}(t)$ se obtiene

$$\left\langle \hat{D}(t) \right\rangle_{\rho} = \left\langle i^{-1}\left[\hat{O}_1,\hat{O}_2\right] \right\rangle_{\rho} = i^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \rho(\omega,\omega')C(\omega,\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}d\omega d\omega'$$

3. *La evolución del valor medio*: El requerimiento de que la función $\rho(\omega,\omega')C(\omega,\omega')$ sea regular permite aplicar el teorema de Riemann-Lebesgue. Como consecuencia:

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \hat{D}(t) \right\rangle_{\rho} = 0$$

Esto significa que, para $t\to\infty$, el valor esperado del conmutador entre $\hat{O}_1$ y $\hat{O}_2$ tiende a cero. Entonces, la relación de incerteza de Heisenberg se vuelve indetectable desde el punto de vista experimental.

En otras palabras, cuando $t\to\infty$ es posible calcular el valor medio del observable $\hat{D}(t)$ suponiendo que la evolución del observable es tal que alcanzó un valor estable $\hat{D}(*)$ tal que

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \hat{D}(t) \right\rangle_{\rho} = \left\langle \hat{D}(0) \right\rangle_{\rho}$$

donde $\hat{D}(*)=0$. De este modo capturamos de una forma más fiel la concepción del límite clásico ya que según esta descripción no sólo desaparece la interferencia: desde el punto de vista experimental un par de observables que inicialmente no conmutaban, tienden a conmutar luego de un tiempo lo suficientemente largo.

4. **El límite clásico de las estructuras lógicas**

El objetivo central de este artículo es iniciar el estudio del límite clásico de la mecánica cuántica desde el punto de vista de la estructura lógica de la teoría. Como ya hemos visto la diferencia fundamental entre el retículo de propiedades clásico y su correspondiente cuántico se resume en la propiedad distributiva. Una estructura Booleana sólo aparece en un retículo distributivo y ortocomplementado.

Los estudios dedicados a la llegada al equilibrio y la decoherencia cuántica revelan que el límite clásico sólo es posible bajo una evolución del tipo no unitaria, un grano grueso, o algún elemento adicional (ver Castagnino & Autor 2013). De otro modo, un conjunto de propiedades cuyos proyectotes no conmutan, y por lo tanto forman un álgebra no clásica nunca perderían esta propiedad. La decoherencia inducida por el ambiente hace uso de la evolución no unitaria propia de los sistemas abiertos y la decoherencia autinducida apela al grano grueso. En efecto, la evolución descripta en la sección anterior muestra que el conmutador entre dos observables $\hat{O}_1$ y $\hat{O}_2$ se hace cero, al menos desde el punto de vista de los valores medios. Según lo expuesto, si medimos el observable $\hat{D}(t)$ al principio del proceso, su valor medio es distinto de cero; pero si lo medimos al final del proceso, su valor medio es nulo. Esto significa que desde el punto de vista observacional podemos asumir que $\hat{O}_1$ y $\hat{O}_2$ son observables compatibles. Pero ¿esto significa que hemos recobrado la distributividad?

La evolución presentada en la sección anterior se puede describir del siguiente modo. Consideremos dos propiedades, *A* corresponde con el valor o_1 del observable $\hat{O}_1$, y *B* corresponde con el valor o_2 del observable $\hat{O}_2$. Si pensamos a estas propiedades como vectores en el espacio de Hilbert, entonces forman un ángulo. La evolución es tal que el ángulo entre los vectores que representan las propiedades *A* y *B* disminuye. Mientras el ángulo no sea exactamente cero no recuperamos la distributividad. Pero en el límite de tiempo tendiendo a infinito, el ángulo entre los vectores que representan las propiedades *A* y *B* se hace cero, por lo tanto los observables correspondientes pasan a conmutar entre sí. Entonces las propiedades se vuelven compatibles y así recuperamos la distributividad. En otras palabras, la decoherencia también puede ser entendida como un proceso que vuelve compatibles observables que inicialmente no lo eran y como consecuencia transforma la lógica cuántica en una lógica booleana.

5. **Conclusiones**

A través de la decoherencia de los valores medios es posible estudiar el límite clásico de un sistema cuántico en términos de la evolución de los observables. Como a partir de los observables relevantes es posible construir la estructura lógica de sus propiedades, el proceso de decoherencia describe a su vez la evolución de dicha estructura lógica.

Este trabajo dota a la decoherencia de un contenido semántico más fuerte del que implica la mera desaparición de la interferencia. La evolución temporal de los conmutadores nos permite entender a la decoherencia como un proceso mediante el cual la estructura lógica que subyace al sistema adquiere características clásicas, es decir booleanas. Estas características tienen consecuencias relevantes en el cálculo de las probabilidades de los valores de los observables que decoheren.

Aplicando el formalismo expuesto podemos establecer la transición entre dos lógicas, la lógica cuántica y la clásica, desde el punto de vista observacional. Este trabajo sienta las bases de su continuación natural, es decir, el estudio de la evolución temporal detallada de las propiedades lógicas de los sistemas cuánticos. Por ejemplo, analizando la evolución de los observables en si en lugar de la de sus valores medios. Por otro lado, aunque el retículo habitual se construye a partir de las propiedades del sistema, se plantea el desafío de construir un retículo a partir de los valores medios. En ambas propuestas seria posible enriquecer tanto el estudio del límite clásico (a partir de la introducción de elementos propios de la lógica) como el enriquecimiento de la lógica misma (a partir de la introducción de una dimensión diacrónica en su estudio).

Referencias

Antoniou, I., Laura, R., Tasaki, S. and Suchaecki, Z. (1997), Physica A, 241, 737-772.

Birkhoff, G., von Neumann, J. (1936), Annals of Math. 37, pp. 823-843.

Boole, G. (1854), An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, London: Macmillan.

Bub, J. (1997), Interpreting the Quantum World, Cambridge: Cambridge University Press.

Castagnino M., Autor (2011).

Castagnino M., Autor (2013).

Castagnino, M. (1999), Int. Jour. Theor. Phys.,38, 1333.

Castagnino, M. (2004), Physica A, 335, 511.

Castagnino, M. (2006), Phys. Lett. A, 357, 97.

Castagnino, M., Autor, Laura, R., Lombardi, O. (2008).

Castagnino, M., Gadella, M. (2006), Found. Phys., 36, 920.

Castagnino, M., Laura, R. (1997), Phys. Rev. A, 56, 108.

Castagnino, M., Laura, R. (2000a), Int. Jour. Theor. Phys., 39, 1767.

Castagnino, M., Laura, R. (2000b), Phys. Rev. A, 62, 022107.

Castagnino, M., Lombardi, O. (2003), Int. Jour. Theor. Phys., 42, 1281.

Castagnino, M., Lombardi, O. (2004), Studies In History and Philosophy of Modern Physics, 35, pp. 73-107.

Castagnino, M., Lombardi, O. (2005), Phil. Scie.,72 ,764.

Castagnino, M., Ordoñez, A. (2004), Int. Jour. Theor. Phys., 43, 695.

Cohen, D. W. (1989), An introduction to Hilbert space and quantum logic, Springer-Verlag, New York.

Autor, Lombardi O., Castagnino M. (2014).

Gudder, S.P. (1979), Stochastic Methods in Quantum Mechanics, North Holland, New York-Oxford.

Holik, F., Plastino, A., Saenz, M. (2014), Annals Of Physics, Volume 340, Issue 1, 293-310.

Hughes, R.I.G. (1992), The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics, Harvard Univerity Press, Cambridge.

Kiefer C., Polarski D. (2009): Adv. Sci. Lett., 2, 164-173.

Kiefer, C., Polarski D. (1998), Annalen Phys. 7, 137-158.

Laura, R., Castagnino, M. (1998a), Phys. Rev. A, 57, 4140.

Laura, R., M. Castagnino, M. (1998b), Phys. Rev. E, 57, 3948.

Mittelstaedt, P. (1978), Quantum Logic. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Omnès, R. (1994), The interpretation of quantum mechanics, Princeton University Press.

Redei, M., Summers, S. (2007), Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys. 38 (2), 390-417.

Sakurai, J. J.(1994), Modern Quantum Mechanics, Revised Edition, Addison-Wesley, New York.

Schlosshauer, M. (2007), Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition, Berlin: Springer.

van Hove, L. (1957), Physica 23, 441.

van Hove, L. (1959), Physica 25, 268.

Zurek, W. (1981), Physical Review D, 24: 1516-25.

Zurek, W. (2003), Reviews of Modern Physics, 75: 715-76.

Zurek, W. H. (1982), Phys. Rev. D, 26, 1862.